## QCM

1) $I=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

2) $(f^{-1})'(\frac{1}{2})=\frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$

3) f réalise une bijection de $[1,4]$ sur $[1,4]$

4) f est dérivable sur $]0,+\infty[$

## *VRAI-FAUX :*

1) (FAUX)

CONTRE EXEMPLE : $f(x)=3-\frac{4x}{x^2+3}$

* f(1)=2
* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$
* f est dérivable sur $[1,+\infty[$
* $f'(x)=\frac{4(x^2-3)}{(x^2+1)^2}$

| x | 1 | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | - | 0 | + | |
| f(x) | 2 | ↘ | $3-\frac{2}{\sqrt{3}}$ | ↗ | 3 |

$$f([1,+\infty[)=\left[3-\frac{2}{\sqrt{3}},3\right[$$

2) (VRAI)

* f(x)=ax+b ; $a\neq 0$

f '(x)=a

• si a>0 ; f continue et strictement croissante

f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

• si a<0 ; f est continue et strictement décroissante

f : bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

3) (FAUX)

$\sqrt[3]{16} > 2$ car $16>2^3$

$\sqrt[4]{16} = 2$

$\sqrt[4]{16} < \sqrt[3]{16}$

4) (VRAI) POUR N≥2

$f(x) = \sqrt[n]{x} \rightarrow f^{-1}(x) = x^n$

$(f^{-1})'(0) = 0$

5) (FAUX) CONTRE EXEMPLE :

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2} \qquad I=\mathbb{R}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = 0$

$f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = ]0,+\infty[$

$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow y + \sqrt{1+y^2} = x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+y^2} = x - y \Leftrightarrow 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2xy \Leftrightarrow y = \frac{x^2-1}{2x}$$

$f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{2x}$ $f^{-1}$ ne garde pas un signe constant sur $]0,+\infty[$

## EXERCICE№1

1) $f_1$ n'est pas une bijection de [-4,3] sur [-4,3]

2) $f_2$ est une bijection de [-3,1] sur [-4,4] ( continue et strictement décroissante)

3) $f_3$ est une bijection de [-3,4] sur [-3,4] ( continue et strictement croissante)

**EXERCICE№2**

$f(x) = x^2 - 4x + 5$ ; $I = ]-\infty,2]$

1) f est dérivable sur $]-\infty,2]$

et $f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2) \leq 0$ pour tout $x \in ]-\infty,2]$

f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,2]$

elle réalise donc une bijection de $]-\infty,2]$ sur $J = f(]-\infty,2]) = [f(2), \lim\limits_{x \to -\infty} f$ [

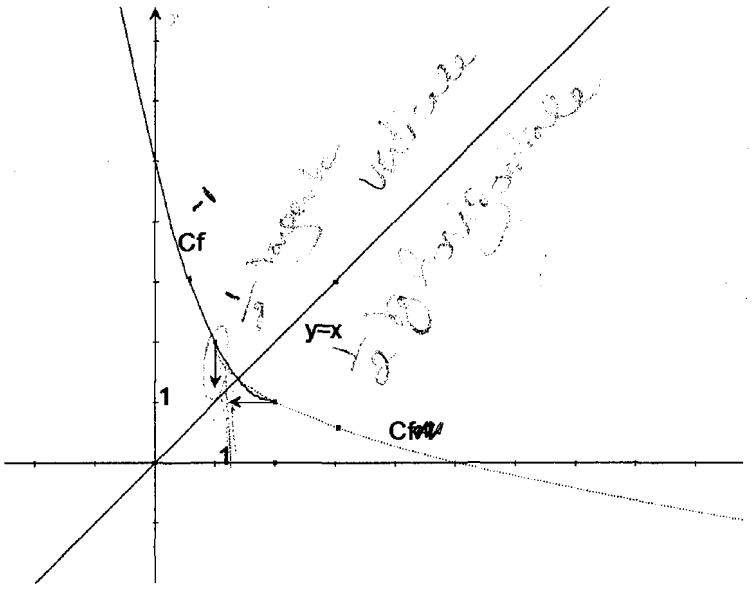
$J = [1,+\infty[$

2)

| $x$ | $-\infty$ | $2$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $1$ |

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty}(x) = -\infty$$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de $(0,\vec{j})$ au voisinage de $(-\infty)$




3) – a) $(\mathcal{C}_{f^{-1}}) = S_\Delta(\mathcal{C}_f)$ avec $\Delta : y = x$

b) $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1. $\Rightarrow f^{-1}$ n'est pas dérivable à droite en 1

c) f est dérivable sur $]-\infty,2[$ et $f'(x) = 2(x-2) \neq 0$ pour tout $x \in ]-\infty,2[$

d'où : $f^{-1}$ est dérivable sur $f(]-\infty,2[) = ]1,+\infty[$.

explicite S I

d) on pose : $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \in [1,+\infty[$ et $y \in ]-\infty,2]$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow y^2 - 4y + 5 = x \Leftrightarrow (y-2)^2 + 1 = x$

$\Leftrightarrow (y-2)^2 = x - 1 \Leftrightarrow |y-2| = \sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow y - 2 = -\sqrt{x-1}$ car $y \leq 2$

$\Leftrightarrow y = 2 - \sqrt{x-1}$ d'où : $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-1}$

**EXERCICE№3**

$f(x) = x - 1 - \frac{1}{x}$ ; $I = ]-\infty,0[$

1) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$

f est continue et strictement croissante sur $]-\infty,0[$

elle réalise donc une bijection de $]-\infty,0[$ sur $J = f(]-\infty,0[)$

$J = f(]-\infty,0[) = ]\lim\limits_{x \to -\infty} f, \lim\limits_{x \to 0^+} f[ = ]-\infty,+\infty[ = IR$

2) soit $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \in IR$ et $y \in ]-\infty,0[$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow y - 1 - \frac{1}{y} = x \Leftrightarrow y^2 - y - 1 = xy$

$\Leftrightarrow y^2 - (1+x)y - 1 = 0$

$\Delta = (1+x)^2 + 4 > 0$

$y = \frac{1 + x - \sqrt{(1+x)^2 + 4}}{2}$ car $y < 0$

D'où : $f^{-1}(x) = \frac{1 + x - \sqrt{x^2 + 2x + 5}}{2}$

3) f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \neq 0$ pour tout $x \in ]-\infty,0[$

d'où : $f^{-1}$ est dérivable sur IR.

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\right]$

**EXERCICE№4**

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ; $I = ]1,+\infty[$

1) f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$

| $x$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | 1 |

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$

f est continue et strictement décroissante sur ]1,+∞[

elle réalise donc une bijection de ]1,+∞[ sur J = f(]1,+∞[)

$J = f(]1,+\infty[) = ]\lim\limits_{x\to+\infty} f , \lim\limits_{x\to 1^+} f\ [ = ]1,+\infty\ [$

$fof(x) = f(f(x)) = \dfrac{f(x)+1}{f(x)-1} = \dfrac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \dfrac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)} = x$ ; $fof(x) = x$

b) $D_{f^{-1}} = D_f = ]1,+\infty[$ et $fof(x) = x$

d'où : $f^{-1}(x) = f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ pour $x \in ]1,+\infty[$

$D_{f^{-1}} = D_f$
$f \circ f(x) = x$
$\Rightarrow f^{-1}(x) = f(x)$

**EXERCICE№5**

$f(x) = \sqrt{x-1} + 2$

1) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 1

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse 1.

2) f est dérivable sur ]1,+∞[ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$

| $x$ | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | + | |
| $f(x)$ | 2 | ↗ | $+\infty$ |

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x-1} + 2\right) = +\infty$

3) * f est continue et strictement croissante sur ]1,+∞[

elle réalise donc une bijection de ]1,+∞[ sur ]2,+∞[

* soit $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \geq 2$ et $y \geq 1$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{y-1} + 2 = x \Leftrightarrow \sqrt{y-1} = x - 2$

$\Leftrightarrow y - 1 = (x-2)^2 \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 5$

D'où : $f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5$

4) $f^{-1}$ est dérivable sur [2,+∞[

## EXERCICE№6

$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

2) f est dérivable sur IR et $f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})}{1+x^2}$

$f'(x) = \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^2} > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | 2 |

Pour $x \neq 0$

$f(x) = 1 + \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = 0$

* f est continue et strictement croissante sur IR ,elle réalise donc une bijection de IR sur $f(IR) = ]\lim\limits_{x \to -\infty} f , \lim\limits_{x \to +\infty} f[ = ]\,0\,,\,2[$

2) * soit $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \in ]\,0\,,\,2[$ et $y \in IR$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = x \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = x - 1$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{1+y^2} = (x-1)^2$ avec y et $(x-1)$ sont de même signe (*)

$\Leftrightarrow y^2 = (x-1)^2 + (x-1)^2 . y^2 \Leftrightarrow (2x - x^2)\, y^2 = (x-1)^2$

$\Leftrightarrow y\sqrt{2x - x^2} = x - 1$ d'après (*)

D'où : $y = \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$ ; $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}}$

## EXERCICE№7

1) * continuité à droite en 0

Pour x > 0 ; $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 0 = f(0)$ , d'où est continue à droite en 0

* dérivabilité à droite en 0

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x+\sqrt{x}} = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0

2) – a) f est dérivable sur ]0,+∞[ et $f'(x) = \frac{(x+\sqrt{x})-x(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(x+\sqrt{x})^2}$

$= \frac{x+\sqrt{x}-x-\frac{\sqrt{x}}{2}}{(x+\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x})^2} > 0$

Pour $x \in ]0,+\infty[$

| $x$ | 0 | | +∞ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | 1 |

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left( \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \right) = 1$

b) * f est continue et strictement croissante sur [ 0 ,+∞[ ,

elle réalise donc une bijection de $IR_+$ sur $f(IR_+) = [ f(0) , \lim\limits_{x \to +\infty} f[ = [ 0 , 1[$

c) * f est dérivable sur ]0,+∞[ et $f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x})^2} \neq 0$

d'où : $f^{-1}$ est dérivable sur f(]0,+∞[) = ] 0 , 1[ .

* f n'est pas dérivable à droite en 0

($\mathcal{C}_f$) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0 , par suite :

($\mathcal{C}_{f^{-1}}$) admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse f(0) = 0

D'où : $f^{-1}$est dérivable à droite en 0, et $(f^{-1})_d'(0) = 0$

Conclusion : $f^{-1}$ est dérivable sur [0,1[

3) * soit $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \in [0, 1[$ et $y \in IR_+$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{y}{y+\sqrt{y}} = x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+1} = x$

$\Leftrightarrow \sqrt{y} = x\sqrt{y} + x \Leftrightarrow \sqrt{y}(1 - x) = x$

$\Leftrightarrow \sqrt{y} = \frac{x}{x-1} \Leftrightarrow y = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2$ d'où : $f^{-1}(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2$ pour $x \in [0, 1[$

## EXERCICE№8

1) * $f(0)=-1 \Rightarrow g(-1)=0$

$(\zeta_f)$ admet une tangente horizontal au point d'abscisse 0 d'ou $(\zeta_g)$ admet une tangente verticale au point d'abscisse f(0)=-1

par suite g n'est pas dérivable en (-1)

* $f(-2)=1 \Rightarrow g(1)=-2$

$(\zeta_f)$ admet une tangente verticale au point d'abscisse (-2) d'ou $(\zeta_g)$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse f(-2)=1 par suite : g est dérivable en 1 et g'(1)=0

2) * f est décroissante sur $\mathbb{R}$ d'ou g est décroissante sur $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

| x | -∞ | -1 | +∞ |
|---|---|---|---|
| f '(x) | - | \|\| | - |
| f(x) | +∞ ↘ | | -∞ |

3) $(\zeta_g) = S_\Delta(\zeta_f)$ avec $\Delta$ : y=x

## EXERCICE№9

1) * $f(1)= -1 \Rightarrow g(-1)=1$

f est dérivable en 1 et $f'(1)= -1 \neq 0$ d'ou g est dérivable en (-1) et $g'(-1)=\frac{1}{f'(1)} = -1$

* $f(2)= -4 \Rightarrow g(-4)=2$

f n'est pas dérivable a gauche en 2

($\zeta_f$) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 2 d'ou ($\zeta_g$) admet une demi tangente horizontal au point d'abscisse (-4)

g est dérivable a droite en (-4) et $g'_d(-4)=0$

2)

| x | -4 | +∞ |
|---|---|---|
| g(x) | 2 ↘ | -1 |

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -1$

## EXERCICE№10

$f(x) = \tan x$

1) f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$

* f est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

elle réalise donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = ] \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f , \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f [$

$= ]-\infty,+\infty[ = IR$

2) * f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $f'(x) \neq 0 \; ? \; \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

d'où : $f^{-1}$ est dérivable sur IR .

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

On pose $y = f^{-1}(x)$ on aura : $f(y) = x \iff \tan y = x$

d'où : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in IR$

## EXERCICE№11

$f(x) = 2\cos x + 3 \quad x \in [0,\pi]$

1) $f'(x) = -2\sin x < 0$ pour $x \in ]0,\pi[$

| $x$ | 0 | π |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 - | 0 |
| $f(x)$ | 5 ↘ | 1 |

2) * f est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$,

elle réalise donc une bijection de $[0,\pi]$ sur $f([0,\pi]) = [f(\pi),f(0)] = [1,5]$

3) - a) $g(5) = 0$ ; $g(1) = \pi$ ; $g(3) = \frac{\pi}{2}$

b) * f est dérivable sur $]0\ ,\pi\ [$ et $f'(x) = -2sinx \neq 0\ ?\ \forall\ x \in\ ]0\ ,\pi\ [$

d'où : g est dérivable sur $f(]0\ ,\pi\ [) = ]1\ ,5\ [$

$(g)'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{-1}{2siny}$ avec $y = g(x)$ ; $f(y) = x$

$$2cosy + 3 = x \iff cosy = \frac{x-3}{2}$$

* on a : $\sin y = \sqrt{1 - cos^2 y}$ , car $\sin y > 0$

$\sin y = \sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{2}\right)^2}$ d'où : $g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}$

## EXERCICE№12

$f(x) = \frac{1}{\sin x}$

1) et $f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \geq 0$ pour tout $x \in [\frac{\pi}{2}\ ,\pi\ [$

* f est continue et strictement croissante sur $[\frac{\pi}{2}\ ,\pi\ [$,

elle réalise donc une bijection de $[\frac{\pi}{2}\ ,\pi\ [$ sur $f([\frac{\pi}{2}\ ,\pi\ [) = [f(\frac{\pi}{2})\ ,\lim_{x\to\pi^-} f\ [ = [1,+\infty[$

2) soit $\alpha = (f^{-1})(\frac{2\sqrt{3}}{3}) \iff \begin{cases} f(\alpha) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \alpha \in [\frac{\pi}{2}\ ,\pi\ [ \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \alpha \in [\frac{\pi}{2}\ ,\pi\ [ \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha \in [\frac{\pi}{2}\ ,\pi\ [ \end{cases} \iff \alpha = \frac{2\pi}{3}$ d'où : $(f^{-1})(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{2\pi}{3}$ ; $(f^{-1})(\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4}$

3) * f est continue sur $[\frac{\pi}{2}\ ,\pi\ [$ , d'où : $f^{-1}$ est continue sur $[1\ ,+\infty\ [$

* f est dérivable sur $]\frac{\pi}{2}\ ,\pi\ [$ et $f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \neq 0$

d'où : $f^{-1}$ est dérivable sur $f(]\frac{\pi}{2}\ ,\pi\ [) = ]1\ ,+\infty\ [$

* $f^{-1}$ n'est pas dérivable à droite en 1 (voir EX :7 , 2) – c))

Conclusion :

$f^{-1}$ est continue sur $[1\ ,+\infty\ [$ ; $f^{-1}$ est dérivable sur $]1\ ,+\infty\ [$

4) $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}=-\frac{sin^2(y)}{\cos(y)}$ avec $y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(y)\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sin(y)}\Leftrightarrow \sin(y)=\frac{1}{x}$

$\Rightarrow (f^{-1})'(x)=-\frac{1}{x^2.\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{x.\sqrt{x^2-1}}$

## EXERCICE№13

$f(x) = 1 - \tan x$

1) $f'(x) = -(1 + \tan^2 x) < 0$

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ |

2) * f est continue et strictement décroissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,

elle réalise donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $f(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[) = ]\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f, \lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} f[$

$= ]-\infty,+\infty[ = IR$

3) $(f^{-1})(0) = \frac{\pi}{4}$ ; $(f^{-1})(2) = -\frac{\pi}{4}$

4) f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $f'(x) = -(1 + \tan^2 x) \neq 0 ; \forall x \in ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

d'où : $f^{-1}$ est dérivable sur IR .

* soit $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow 1 - \tan y = x \Leftrightarrow \tan y = 1 - x$

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{-1}{1+\tan^2 y} = \frac{-1}{1+(1-x)^2} = \frac{1}{-x^2+2x-2}$

5) $\lim_{x\to-(\frac{\pi}{2})^+} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = -\frac{\pi}{2}$ de même $\lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

$(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ admet deux asymptotes horizontales d'équations respectives :

$y = -\frac{\pi}{2}$ et $y = \frac{\pi}{2}$

## EXERCICE№14

$f(x) = \sqrt{\cos x}$ ; $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$

1) $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sqrt{\cos x}}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \left(\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right).\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$

$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \left(\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right) = \cos'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{1}{\sqrt{\cos x}} = +\infty$ d'où : $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = -\infty$

f n'est pas dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$

2) – a) f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \leq 0 \ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

* f est continue et strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,

elle réalise donc une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $f([0, \frac{\pi}{2}]) = [f(\frac{\pi}{2}), f(0)] = [0, 1]$

par suite f admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur $[0, 1]$

b) f n'est pas dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ d'où :

$(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse $f(\frac{\pi}{2})=0$

Par suite $f^{-1}$ est dérivable à droite en 0 et $(f^{-1})'(0) = 0$

c) $f'_d(0) = 0$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0 d'où :

$(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $f(0) = 1$

D'où : $f^{-1}$ n'est pas dérivable à gauche en 1

3) f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \neq 0$

D'où : $f^{-1}$ est dérivable sur $]0, 1[$

* soit $y = f^{-1}(x) \iff f(y) = x \iff \sqrt{\cos y} = x \iff \cos y = x^2$

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \iff \sin^2 y = 1 - \cos^2 y \iff \sin y = \sqrt{1 - x^4}$ car $y \in ]0, \frac{\pi}{2}[$

D'où : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{-2\sqrt{\cos y}}{\sin y} = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

**EXERCICE№15**

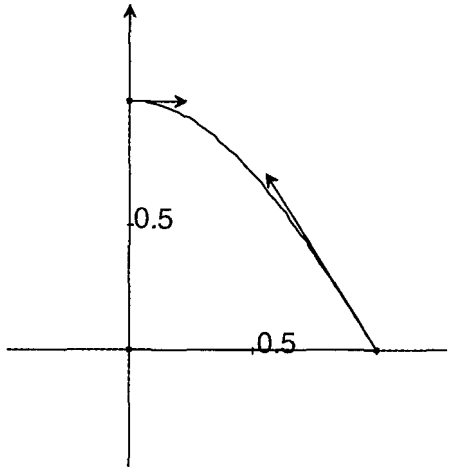
$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ; $\forall x \in [0, 1]$

1) f est dérivable sur $[0, 1]$ et $f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leq 0$ car pour $0 \leq x \leq 1$ ; on a :

$$0 \leq \frac{\pi}{2}x \leq \frac{\pi}{2}$$

| $x$ | 0 | | 1 |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | - | |
| $f(x)$ | 1 | ↘ | 0 |

$f'_d(0) = 0$ ; $f'_g(1) = -\frac{\pi}{2}$




2) * f est continue et strictement décroissante sur [0 , 1] ,

elle réalise donc une bijection de [0 , 1 ] sur f([0 , 1]) = [f(1) , f(0)] = [0 , 1 ] = I

3) f est dérivable sur ]0 , 1] et $f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \neq 0$

D'où : $f^{-1}$ est dérivable sur f(]0,1])= [0 , 1[

* $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)}$ , avec $y = f^{-1}(x)$ d'où : $(f^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}$

On a : $y = f^{-1}(x) \implies f(y) = x \implies \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) = x \implies \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) = \sqrt{1-x^2}$

Car : $\frac{\pi}{2}y \in ]0, \frac{\pi}{2}]$

D'où : $(f^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$

**EXERCICE№16**

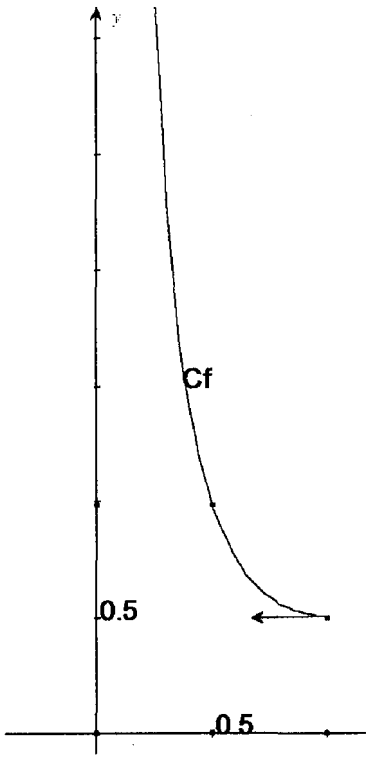
$f(x) = \frac{1}{1-\cos(\pi x)}$ ; $\forall x \in ]0 , 1]$

1) f est dérivable sur ]0 , 1] et $f'(x) = \frac{-\pi \sin(\pi x)}{(1-\cos(\pi x))^2}$ ,

$\forall x \in ]0 , 1] \implies (\pi x) \in ]0 , \pi] \implies \sin(\pi x) \geq 0$ d'où : $f'(x) \leq 0$

| $x$ | 0 | | 1 |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $\frac{1}{2}$ |

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{1-\cos(\pi x)} = +\infty$ car : $1 - \cos(\pi x) > 0$




2) a) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

On pose : $g(x) = f(x) - x$ alors $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ car $f'(x) \leq 0$

* g est continue et strictement décroissante sur ]0 , 1] ,

elle réalise donc une bijection de ]0 , 1 ] sur $g(]0 , 1]) = [ -\frac{1}{2}, +\infty[$

comme $0 \in g(]0 , 1])$ alors il existe un unique réel $x_0 \in ]0 , 1]$ tel que $g(x_0) = 0$

par suite l'équation $f(x) = x$ admet $x_0$ comme unique solution dans ]0 , 1]

$f(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$ d'où : $x_0 = \frac{2}{3}$

3) a) f est continue et strictement décroissante sur ]0 , 1] ,

Donc f est une bijection de ]0 , 1 ] sur $f(]0 , 1]) = [ f(1), \lim_{x \to 0^+} f[ = [\frac{1}{2}, +\infty[$

b) $f'_g(1) = 0 \Rightarrow (\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 1

d'où : $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $f(1) = \frac{1}{2}$

D'où : $f^{-1}$ n'est pas dérivable à droite en $\frac{1}{2}$

c) f est dérivable sur ]0 , 1[ et $f'(x) = \frac{-\pi \sin(\pi x)}{(1-\cos(\pi x))^2} \neq 0$

$\forall x \in ]0,1[$ d'où : $f^{-1}$ est dérivable sur $f(]0,1[) = ]\frac{1}{2}, +\infty[$

* soit $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{1-\cos(\pi y)} = x \Leftrightarrow 1 - \cos(\pi y) = \frac{1}{x}$

*et* $\cos(\pi y) = 1 - \frac{1}{x}$ ; $\sin(\pi y) = \sqrt{1 - \cos^2(\pi y)}$ car $y \in ]0, \pi[$

$\Rightarrow \sin(\pi y) = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{x}\sqrt{2x-1}$

D'où : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{-(1-\cos(\pi y))^2}{\pi \sin(\pi y)} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{\pi}{x}\sqrt{2x-1}}$

$(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\pi x \sqrt{2x-1}}$

**EXERCICE№17**

$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1) $f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2} \leq 0 \ \forall x \in [-1, 1]$

f est continue et strictement décroissante sur [-1 , 1] ,

elle réalise donc une bijection de

[-1 , 1 ] sur $[\frac{2}{3}, 2] = I$

| $x$ | -1 | | 1 |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | - | 0 |
| $f(x)$ | 2 | ↘ | $\frac{2}{3}$ |

2) : $g(x) = f(x) - x$

a) alors $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ car $f'(x) \leq 0$

* g est continue sur [-1 , 1], et $g(-1).g(1) = -1 < 0$ , d'où l'équation $g(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in ]-1, 1[$,

comme g est strictement décroissante alors $\alpha$ est unique.

b) $g(\frac{2}{3}).g(1) < 0 \Rightarrow \alpha \in ]\frac{2}{3}, 1[$,

c) $M(x,y) \in (\mathcal{C}_f) \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ f(x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ g(x) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y = x = \alpha$

$(\mathcal{C}_f) \cap \Delta = \{A(\alpha, \alpha)\}$

3) : $f^{-1}$ n'est pas dérivable à droite en $\frac{2}{3}$ ( voir ex 16 , 3) – b)

4) – a) $f(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{3}$ ; $f(0) = 1$ ; $f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{7}$

b) $(f^{-1})'(\frac{5}{3}) = \frac{1}{f'(-\frac{1}{2})} = -\frac{4}{3}$

$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = -1$

$(f^{-1})'(\frac{5}{7}) = \frac{1}{f'(\frac{1}{2})} = -\frac{49}{12}$

**EXERCICE№18**

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

1) $f'(x) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^3} > 0$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | |
| $f(x)$ | -2 → | 0 |

* f est continue et strictement croissante sur IR ,elle réalise donc une bijection de IR sur g(IR) = ] -2, 0[

2) – a) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

On pose : $g(x) = f(x) - x$ alors $g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^3} - 1 \leq 0$ car $x^2 + 1 \geq 1$

* g est continue et strictement décroissante sur IR ,

elle réalise donc une bijection de IR sur g(IR) = IR ;

comme $0 \in g(IR)$ alors il existe un unique réel $\alpha$ tel que $g(\alpha) = 0$

par suite l'équation $f(x) = x$ admet $\alpha$ comme unique solution dans IR

$g(-2).g(-1) < 0$ (à vérifier) d'où : $-2 < \alpha < -1$

b)

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) - x$ | + | 0 | - |

3) * soit $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \in ]-2, 0[$ et $y \in IR$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} - 1 = x \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = 1 + x$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{1+y^2} = (x+1)^2$ *avec* y et $(x+1)$ de même signe

$\Leftrightarrow y^2 = (x+1)^2 + y(x+1)^2 \Leftrightarrow (-x^2 - 2x)y^2 = (x+1)^2$

$\Leftrightarrow y\sqrt{-x^2 - 2x} = x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x}}$

d'où : $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x}}$ pour $x \in ]-2,0[$

4) $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) récurrence

* $U_0 = -1$ on a : $\alpha \leq U_0 \leq -1$ (vraie)

* supposons que : $\alpha \leq U_n \leq -1$

montrons que : $\alpha \leq U_{n+1} \leq -1$

$\alpha \leq U_n \leq -1 \Rightarrow f(\alpha) \leq f(U_n) \leq f(-1)$ car f est croissante sur IR

d'où : $\alpha \leq U_{n+1} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \leq -1 \Rightarrow \alpha \leq U_{n+1} \leq -1$

* conclusion : $\alpha \leq U_n \leq -1$ pour tout n ∈ IN

b) $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$

$U_n \geq \alpha \Rightarrow f(U_n) - U_n \leq 0$ d'après 2) – b)

D'où : $U_{n+1} - U_n \leq 0 \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$

La suite $(U_n)$ est décroissante et minorée par α , elle est donc convergente.

Soit ℓ sa limite : $U_{n+1} = f(U_n)$ , f est continue sur IR.

D'où : $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \alpha$ ; conclusion : $\lim\limits_{x \to 0^+} U_n = \alpha$

**EXERCICE№19**

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + 1$ ; $\forall x \in [1 , +\infty[$

1) – a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x(x-1)\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x\sqrt{x^2-1}} = +\infty$

D'où : f n'est pas dérivable à droite en 1.

b) f est dérivable sur ]1 , +∞[

$f'(x) = \frac{\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)x - \sqrt{x^2-1}}{x^2} = \frac{1}{x^2.\sqrt{x^2-1}} > 0$

| $x$ | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \| | + | |
| $f(x)$ | 1 | ↗ | 2 |

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1) = 2$

c) f est continue et strictement croissante sur [1 , +∞[ , elle réalise donc une bijection de [1 , +∞[ sur I = f([1 , +∞[) = [1 , 2[

2) –a): $f^{-1}$ est dérivable à droite en 1 et $(f^{-1})_d(1) = 0$ ( voir ex 14 , 2) – b))

b) * soit $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \in [1 , 2[$ et $y \in [1 , +\infty[$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y^2-1}}{y} + 1 = x \Leftrightarrow \sqrt{y^2-1} = y(x-1)$

$\Leftrightarrow y^2 - 1 = y^2(x-1)^2 \Leftrightarrow \left[1-(x-1)^2\right].y^2 = 1$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2x-x^2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ (car y>0) d'où : $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

B)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(\frac{1}{\cos x})} & si\ x \in [0, \frac{\pi}{2}[ \\ \frac{1}{2} & si\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1) – a) $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{1}{\cos x} = +\infty$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

D'où : $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} f(\frac{1}{\cos x}) = 2$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} g(x) = \frac{1}{2} = g(\frac{\pi}{2})$ ; g est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$

b) * pour $x = \frac{\pi}{2}$ ; $\frac{1}{1+\sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{2} = g(\frac{\pi}{2})$

* pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$$f(\frac{1}{\cos x}) = \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}}{\frac{1}{\cos x}} + 1 = \cos x . \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} + 1 = \cos x . \left|\frac{\sin x}{\cos x}\right| + 1$$

$= \cos x . \frac{\sin x}{\cos x} + 1$ car $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$= 1 + \sin x$ d'où : $g(x) = \frac{1}{1+\sin x}$

<u>conclusion</u> : $g(x) = \frac{1}{1+\sin x}$ , pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

2) $g'(x) = \frac{-\cos x}{(1+\sin x)^2} \leq 0$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

* g est continue et strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, elle réalise donc une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$, sur $J = [\frac{1}{2}, 1]$,

3) –a): g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $g'(x) = \frac{-\cos x}{(1+\sin x)^2} \neq 0$

D'où : $g^{-1}$ est dérivable sur $g([0, \frac{\pi}{2}[) = ]\frac{1}{2}, 1]$ et : $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$

* soit $y = g^{-1}(x) \Rightarrow g(y) = x \Rightarrow \frac{1}{1+\sin y} = x \Rightarrow 1 + \sin y = \frac{1}{x}$

$et\ \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} \Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2}$

$\cos y = \frac{1}{x}\sqrt{2x-1}$

d'où : $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(y)} = -\frac{(1+\sin y)^2}{\cos y} = -\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}\sqrt{2x-1}}$

$(g^{-1})'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{2x-1}}$

b) $g'_g(\frac{\pi}{2}) = 0$

$(\mathcal{C}_g)$ admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ d'où :

$(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$

D'où : $g^{-1}$ n'est pas dérivable à droite en $\frac{1}{2}$

**EXERCICE№20**

1) * $x = \frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{27}\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{81}} = \frac{\sqrt[3]{3}\times 3\sqrt{3}\times\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{3^4}}$

$= \frac{\sqrt[3]{3}\times 3\sqrt{3}\times 2}{3\sqrt[3]{3}} = 2\sqrt{3}$

* $y = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}} = \sqrt[3]{\frac{4}{32}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$

* $t = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

2) a) $(2+\sqrt{5})^3 = 2^3 + 3\times 2^2\sqrt{5} + 3\times 2\times(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^3$

$= 8 + 12\sqrt{5} + 30 + 5\sqrt{5} = 38 + 17\sqrt{5}$

b) $B = \sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} - \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}} \leftarrow n'a$ pas de sens

car $38 - 17\sqrt{5} < 0$

**EXERCICE№21**

1) $\sqrt[3]{x}=\sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x=(\sqrt[4]{2})^3 \Leftrightarrow x=\sqrt[4]{8} \Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\{\sqrt[4]{8}\}$

2) $\sqrt[5]{x^2}=\sqrt[3]{3} \Leftrightarrow x^2=(\sqrt[3]{3})^5 \Leftrightarrow x=\sqrt[6]{3^5}$ ou $x=-\sqrt[6]{3^5} \Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\{\sqrt[6]{3^5},-\sqrt[6]{3^5}\}$

3) $\sqrt[3]{x^2}-3.\sqrt[3]{x}+2=0$

*dans* $\mathbb{R}_+$: $(E) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x})^2-3.\sqrt[3]{x}+2=0$ on pose $t=\sqrt[3]{x}$

*l'équation* devient : $t^2-3t+2=0 \Rightarrow t=1$ ou $t=2$

$t=1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}=1 \Leftrightarrow x=1$ *et* $t=2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}=2 \Leftrightarrow x=8 \Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\{1,8\}$

4) $(1-\sqrt[4]{x})^3+8=0 \Leftrightarrow (\sqrt[4]{x}-1)^3=8 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x}-1=2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x}=3$

$\Leftrightarrow x=3^4 \Leftrightarrow x=81 \quad \Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\{81\}$

**EXERCICE№22**

* $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ *d'où* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{(x^2-x+1)}=+\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\sqrt[3]{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}.\left[\sqrt[3]{x^2}-1\right]=+\infty$

* on pose $f(x)=\sqrt[3]{x}$ f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

* $\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^3}}=\sqrt[12]{x^3}$ ; $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^4}}=\sqrt[12]{x^4}$ ; $\sqrt{x}=\sqrt{\sqrt[6]{x^6}}=\sqrt[12]{x^6}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[12]{x^4}-\sqrt[12]{x^6}}{\sqrt[12]{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[12]{x^4}}{\sqrt[12]{x^3}}-\frac{\sqrt[12]{x^6}}{\sqrt[12]{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[12]{x}-\sqrt[12]{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[12]{x}.(1-\sqrt[12]{x^2})=-\infty$$

## EXERCICE№23

$f(x) = x + \sqrt[3]{x}$ ;

1) – a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0

interprétation :

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0

2) f est dérivable sur ]0 , +∞[

$f'(x) = 1 + \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} > 0$

| $x$ | 0 | +∞ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | |
| $f(x)$ | 0 → | +∞ |

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une bronche parabolique de direction asymptotique celle de Δ :y = $x$

4) * f est continue et strictement croissante sur $IR_+$ , elle réalise donc une bijection de $IR_+$, sur $f(IR_+) = [f(0), \lim\limits_{x \to +\infty} f[ = [0, +\infty[ = IR_+$

5) f(1) = 2 ; f(2) = 10

$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{3}{4}$ ; $(f^{-1})'(10) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{1+3\sqrt[3]{4}}$

## EXERCICE№24

$f(x) = x \cdot \sqrt[4]{x}$ ;

1) – a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt[4]{x} = 0$

f est dérivable à droite en 0 $f'_d(0) = 0$

interprétation :

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0

2)

$f'(x) = \sqrt[4]{x} + x\left(\frac{1}{4(\sqrt[4]{x})^3}\right) = \frac{5}{4}\sqrt[4]{x} \geq 0$

| $x$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | + | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

3) * $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[4]{x} = +\infty$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une bronche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$au vois$(+\infty)$

4) * f est continue et strictement croissante sur $IR_+$ , elle réalise donc une bijection de $IR_+$, sur $f(IR_+) = [f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f[ = [0, +\infty[ = IR_+$

5) * soit $y = f^{-1}(x)$ avec : $x$ et $y \in IR_+$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow y \cdot \sqrt[4]{y} = x \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{y}\right)^5 = x$

$\Leftrightarrow \sqrt[4]{y} = \sqrt[5]{x} \Leftrightarrow y = \sqrt[5]{x^4}$ d'où : $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x^4}$ pour $x \in IR_+$